Université Denis Diderot (Paris 7) **MM1**
Mathématiques **4 novembre 2013**

Exercice 1 1. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. À quelles conditions E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$?

Le sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si $0_{\mathbb{R}^n}$ appartient à E et si pour tous λ, μ dans $\mathbb{R}$ et pour tous u, v dans E, l'élément $\lambda u + \mu v$ appartient à E.

2. Le sous-ensemble $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 1\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Justifier.

Le sous-espace E de $\mathbb{R}^3$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$ n'appartient pas à E (en effet $0 + 0 + 0 = 0 \neq 1$).

Exercice 2 1. Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}$; donner la définition de la borne supérieure de Ω.

Un élément $m \in \mathbb{R}$ est un majorant de Ω si pour tout x dans Ω on a $x \leqslant m$. Le plus petit des majorants de Ω (s'il existe) s'appelle la borne supérieure de Ω (dans $\mathbb{R}$).

2. Déterminer la borne supérieure de l'intervalle $]2, 3[$; justifier soigneusement.

On va montrer que 3 est la borne supérieure de l'intervalle $I =]2, 3[$.
- *Il est clair que 3 est un majorant de I.*
- *Soit maintenant $m < 3$. Il existe alors un entier $n \geqslant 2$ tel que $m < 3 - \frac{1}{n}$, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Comme $3 - \frac{1}{n} \in I$, m n'est donc pas un majorant de I.*

On conclut que 3 est le plus petit des majorants de I.

Exercice 3 1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S) suivant :

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 8x - 2y = 0 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 4x - y = 0 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 4x - y = 0 \\ 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Le système (S) admet donc une unique solution : $(0, 0, 0)$.

2. Soient u_1, u_2 et u_3 les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par :

$$u_1 = (3, 2, 1), \quad u_2 = (1, -4, 2) \quad \text{et} \quad u_3 = (-1, 2, 1).$$

Rappeler ce que signifie « la famille (u_1, u_2, u_3) est libre ».

La famille (u_1, u_2, u_3) est libre si pour tous λ_1, λ_2, λ_3 dans $\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$, on a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle une famille libre ?

Soient λ_1, λ_2 et λ_3 dans $\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$, i.e. tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{array} \right.$$

D'après la question précédente $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

3. Rappeler ce que signifie « la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ ».

   La famille (u_1, u_2, u_3) est une base si la famille (u_1, u_2, u_3) est une famille libre qui engendre $\mathbb{R}^3$.

   La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

   La famille (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u_1 et u_2 et soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u_3.

   (a) Quelle est la dimension de E ?

   La dimension de E est 2 ; en effet E est engendré par les deux vecteurs u_1 et u_2 qui ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre.

   (b) Quelle est la dimension de F ?

   La dimension de F est 1, en effet F est engendré par le vecteur non nul u_3.

   (c) Les sous-espaces E et F sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

   On sait (voir partie 3.) que (u_1, u_2, u_3) est une famille génératrice. Tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$ s'écrit donc comme $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$. Comme $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in E$ et $\lambda_3 u_3 \in F$, ceci montre que $E + F = \mathbb{R}^3$. La formule de Grassmann $\dim(E+F) + \dim(E \cap F) = \dim(E) + \dim(F) = 1 + 2$ implique que $\dim(E \cap F) = 0$, autrement dit que $E \cap F = \{0\}$. Les sous-espaces E et F sont donc supplémentaires.

5. Donner un système d'équations cartésiennes de E.

   Puisque $\dim E = 2$ on cherche a, b et c dans $\mathbb{R}$ tels que

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$$

   En écrivant que u_1 et u_3 appartiennent à E on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 0 \\ x - 4y + 2z \end{array} \right.$$

   Or

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 0 \\ 7x + 4z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -4z/7 \\ y = 5z/14 \end{array} \right.$$

   On a donc

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -8x + 5y + 14z = 0\}$$

Barême indicatif : exercice 1 (3 points), exercice 2 (4 points), exercice 3 (15 points)